

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

А.И. Малышев

Избранные главы теории нелинейных колебаний: двумерные отображения

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией физического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлению 011200 «Физика»

Нижний Новгород
2012

УДК 530.182

ББК В 22.213+22.311

М 20

М 20 Малышев А.И. ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ: ДВУМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 26 с.

Рецензент:

доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, к.ф.-м.н. **Канаков О.И.**

В настоящем пособии представлен материал по теме «Двумерные отображения», входящей в учебный курс «Нелинейные колебания и волны», читаемый на физическом факультете ННГУ. Изложение материала проведено на примерах двух механических систем, простых по своей природе, но способных, однако, демонстрировать весьма нетривиальное поведение. Теоретические выкладки проиллюстрированы результатами численного моделирования.

УДК 530.182

ББК В 22.213+22.311

© Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2012

Введение

Из анализа одномерных отображений известно, что в зависимости от значений управляющих параметров они могут проявлять весьма сложную динамику. Так, например, отображение Фейгенбаума демонстрирует переход к хаосу через последовательные удвоения периода, и, казалось бы, совсем простая динамическая система начинает вести себя непредсказуемым образом.

Не менее интересной и сложной, как представляется, должна быть динамика систем, описываемых отображениями большей размерности, например, двумерными отображениями. Целью настоящего пособия является знакомство с двумя примерами механических систем, допускающих описание с помощью двумерных отображений, изучение свойств самих отображений, а также, что немаловажно, установление соответствий между шагами отображений и траекториями в реальном пространстве.

Первым примером служит движение материальной точки в канале, одна из стенок которого ровная, а другая – имеет синусоидальную форму. Вторым примером – движение материальной точки в однородном поле тяжести и ее отскоки от синусоидально гофрированного полотна. Подобные динамические системы хорошо известны в нелинейной физике. В этой связи необходимо, пожалуй, упомянуть задачу о трехмерных колебаниях материальной точки между двумя плоскостями, одна из которых гофрирована в двух направлениях [1]; в этой модельной системе изучалась диффузия Арнольда [2, 3]. Эти динамические системы имеют также очевидное сходство с моделью Улама и гравитационной машиной Заславского (см., например, [4]), однако в последних случаях акцент делался на достижении режима стохастического ускорения, в связи с чем и исследования проводились в полностью хаотическом режиме. В рамках же настоящего пособия мы рассмотрим в большей степени движение регулярное, сделав, однако, и соответствующие замечания, касающиеся проявления хаоса.

I. Материальная точка в канале с гофрированной границей

Рассмотрим движение материальной точки в двумерном бесконечном канале (см. рис. 1), одна из стенок которого ровная и описывается уравнением $y = 0$, а другая – имеет синусоидальную форму и определена как $y = d + a \cos kx$. Здесь d – средняя ширина канала, $2\pi/k$ – период гофрировки, которую далее будем считать слабой ($a \ll d$) и плавной ($ka \ll 1$). Поскольку в промежутках между абсолютно упругими соударениями траектория материальной точки прямолинейна, несложно из геометрических соображений связать между собой координаты точек двух последовательных соударений о ровную стенку канала, а также значения углов, под которыми эти соударения происходят (см. рис. 1):

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2ka \sin(kx_n + kd \operatorname{tg} \alpha_n), \\ x_{n+1} = x_n + d(\operatorname{tg} \alpha_n + \operatorname{tg} \alpha_{n+1}). \end{cases} \quad (1)$$

Эти соотношения являются приближенными, учитывающими малость и плавность гофрировки. Точные отображения анализировались, например, в работе [5].

1. Стационарные точки отображения и их устойчивость

Анализ полученных отображений необходимо начать с нахождения его стационарных точек (x_0, α_0) , которые в свою очередь соответствуют периодическим траекториям. Пусть точки двух последовательных отскоков отделены друг от друга по оси x на целое число m периодов гофрировки, т.е. $x_{n+1} = x_n + 2\pi m/k$. Для угла отскока условие периодичности означает его неизменность: $\alpha_{n+1} = \alpha_n$. Подставляя последние соотношения в систему (1), получим:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\pi m}{kd}, \\ x_0 = \frac{\pi}{k} l, \end{cases} \quad (2)$$

где m, l – целые числа. Примеры траекторий материальной точки в канале для нескольких различных значений m и l представлены на рис. 2. Заметим здесь, что в силу периодичности гофрировки все нечетные значения l эквивалентны друг другу, также

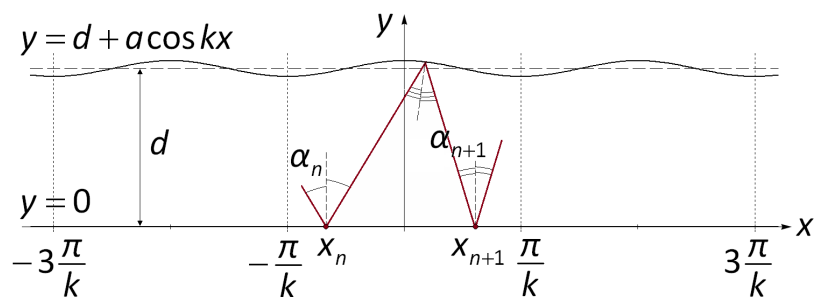


Рис. 1. Канал с гофрированной границей и фрагмент траектории материальной точки в нем.

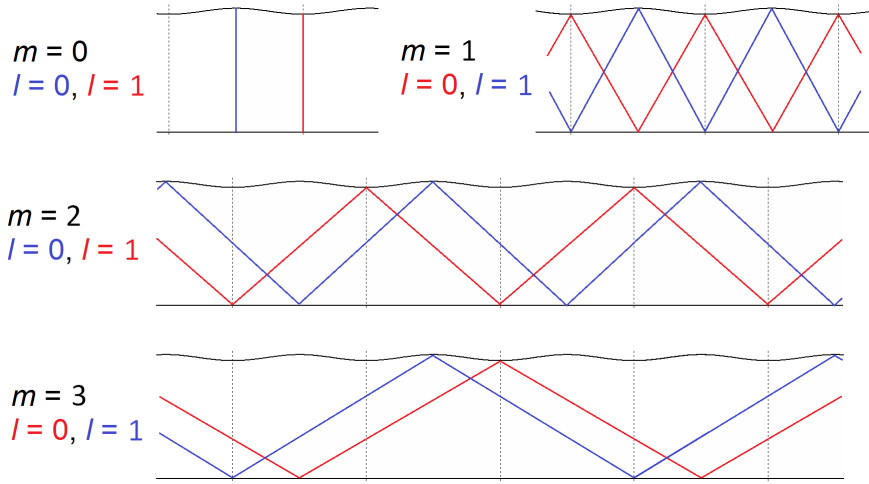


Рис. 2. Периодические траектории в канале, отвечающие различным значениям m и l в (2).

как эквивалентны друг другу и все четные его значения, поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь двух значений l – нуля и единицы.

Рассмотрим подробнее пару траекторий с $m = 1$, т.е. траектории, стартующие под углом $\alpha_0 = \arctg(\pi/kd)$ из точек $x_0 = 0$ ($l = 0$) или $x_0 = \pi/k$ ($l = 1$) (см. рис. 2). Для выяснения их устойчивости линеаризуем отображения вблизи выбранной траектории. Начнем со случая $l = 0$. Итак, введем новые переменные, которые будут отвечать за малые отклонения от выбранной траектории:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{n+i} = x_{n+i} - 2\pi i/k, \text{ где } i \in Z \\ \tilde{\alpha}_n = \alpha_n - \alpha_0, \end{cases} \quad (3)$$

После подстановки в (1) и последующей линеаризации уравнений системы она приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_{n+1} = \left(1 + \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}\right) \tilde{\alpha}_n + 2k^2 a \tilde{x}_n \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{d}{\cos^2 \alpha_0} (\tilde{\alpha}_n + \tilde{\alpha}_{n+1}) \end{cases} \quad (4)$$

Теперь переменные, отвечающие последовательным шагам отображения, можно явно выделить:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = \left(1 + \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}\right) \tilde{x}_n + \frac{2d}{\cos^2 \alpha_0} \left(1 + \frac{k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}\right) \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\alpha}_{n+1} = 2k^2 a \tilde{x}_n + \left(1 + \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}\right) \tilde{\alpha}_n \end{cases} \quad (5)$$

После этого становится возможным представить систему этих равенств в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix}_{n+1} = \hat{A} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix}_n, \quad (6)$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}\right) & \frac{2d}{\cos^2 \alpha_0} \left(1 + \frac{k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}\right) \\ 2k^2 a & \left(1 + \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}\right) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Определитель матрицы равен единице, что говорит о сохранении фазового объема, а сравнение модуля следа этой матрицы с двойкой дает информацию об устойчивости положения равновесия [1]:

$$\text{Sp} \hat{A} = 2 + \frac{4k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0} \Rightarrow |\text{Sp} \hat{A}| > 2, \quad (8)$$

что указывает на *неустойчивость* выбранной траектории.

Поскольку вид неустойчивости также играет роль, попробуем определить тип положения равновесия. Для этого решим систему уравнений (5), при этом искать решение будем в следующем виде: $\tilde{x}_n = At^n$ и $\tilde{\alpha}_n = Bt^n$. Подстановка этих выражений в равенство (6) превращает его в уравнение на собственные значения и собственные векторы матрицы \hat{A} :

$$\hat{A} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Нетрудно найти, что

$$t_{1,2} = e^{\pm\mu}, \quad \text{где} \quad \text{ch} \mu = 1 + \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}. \quad (10)$$

Тогда для компонент собственных векторов будем иметь:

$$A^\pm = \mp \frac{\text{sh} \mu}{2k^2 a} B^\pm, \quad (11)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют знакам в (10). В результате решение системы (5) примет довольно простой вид

$$\begin{cases} \frac{2k^2 a}{\text{sh} \mu} \tilde{x}_n = -B^+ e^{n\mu} + B^- e^{-n\mu}, \\ \tilde{\alpha}_n = B^+ e^{n\mu} + B^- e^{-n\mu}, \end{cases} \quad (12)$$

откуда нетрудно получить уравнение траектории в фазовой плоскости вблизи положения равновесия

$$\tilde{\alpha}_n^2 - \left(\frac{\text{sh}\mu}{2k^2 a} \right)^2 \tilde{\chi}_n^2 = 4B^+ B^-, \quad (13)$$

которое определяет семейство гипербол (см. рис. 3). Таким образом, точка с координатами $\alpha_0 = \text{arctg}(\pi/kd)$, $x_0 = 0$ является положением равновесия типа «седло», а соответствующая ей периодическая траектория (см. рис. 2) – неустойчива.

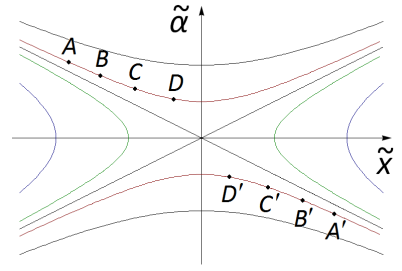


Рис. 3. Фазовые траектории согласно уравнению (13).

Замечание. Для двумерных отображений седловые точки разделяют на два типа – обыкновенные и с отражением. В данном случае речь идет о первом типе, когда шаги отображения лежат на какой-либо одной из гипербол, например, согласно последовательности $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ (см. рис. 3). Седловые точки с отражением реализуются, когда $\text{Sp} \hat{A} < -2$ и, соответственно, собственные значения $t_{1,2} < 0$. Шаги отображения при этом располагаются на паре симметричных относительно начала координат гипербол, как, например, в последовательности $A \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow D'$.

Проведем теперь аналогичный анализ для траектории, стартующей из точки $x_0 = \pi/k$ под тем же углом $\alpha_0 = \text{arctg}(\pi/kd)$. Проведем замену переменных в системе (1) посредством подстановки, аналогичной (3):

$$\begin{cases} \tilde{\chi}_{n+i} = x_{n+i} - \pi(2i+1)/k, \text{ где } i \in \mathbb{Z} \\ \tilde{\alpha}_n = \alpha_n - \alpha_0. \end{cases} \quad (14)$$

После линеаризации получим

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix}_{n+1} = \hat{A} \begin{pmatrix} \tilde{\chi} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix}_n, \quad (15)$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0} \right) & \frac{2d}{\cos^2 \alpha_0} \left(1 - \frac{k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0} \right) \\ -2k^2 a & \left(1 - \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0} \right) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

По-прежнему, $\det \hat{A} = 1$, а для следа этой матрицы имеем:

$$\text{Sp} \hat{A} = 2 - \frac{4k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0} \Rightarrow |\text{Sp} \hat{A}| < 2, \quad (17)$$

что указывает на устойчивость выбранной траектории.

Замечание. Последнее неравенство выполняется лишь при условии, что второе слагаемое в выражении для следа предполагается малым по сравнению с первым. Очевидно, даже с учетом того, что $ka \ll 1$, надлежащим выбором параметров

знак неравенства (17) может быть заменен на противоположный. При этом положение равновесия станет седловой точкой с отражением (см. Замечание выше)

Аналогично предыдущему случаю найдем собственные значения матрицы \hat{A} и связь между компонентами ее собственных векторов:

$$t_{1,2} = e^{\pm i\mu}, \quad \text{где} \quad \cos\mu = 1 - \frac{2k^2 ad}{\cos^2 \alpha_0}, \quad (18)$$

$$A^\pm = \mp i \frac{\sin\mu}{2k^2 a} B^\pm. \quad (19)$$

В итоге получаем решение вблизи выбранного положения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{2k^2 a}{i \sin\mu} \tilde{x}_n = -B^+ e^{in\mu} + B^- e^{-in\mu} \\ \tilde{\alpha}_n = B^+ e^{in\mu} + B^- e^{-in\mu} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_n^2 + \left(\frac{\sin\mu}{2k^2 a} \right)^2 \tilde{x}_n^2 = 4B^+ B^- \quad (20)$$

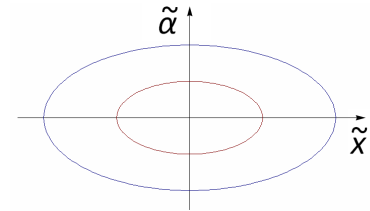


Рис. 4. Фазовые траектории согласно уравнению (20).

что задает в фазовой плоскости семейство эллипсов (см. рис. 4). Таким образом, точка с координатами $x_0 = \pi/k$ и $\alpha_0 = \text{arctg}(\pi/kd)$ является положением равновесия типа «центр», а соответствующая ей периодическая траектория (см. рис. 2) – устойчива.

Замечание. Аналогично можно показать, что все периодические траектории, для которых числа m и l имеют одинаковую четность, – устойчивы, все траектории, для которых m и l разной четности – неустойчивы. На рис. 2 устойчивые траектории показаны синим цветом, неустойчивые – красным.

После того, как был проведен анализ устойчивости стационарных точек отображения, уместно подвести некоторые итоги и обозначить новые возникающие вопросы. Этому посвящен следующий раздел работы.

2. Предварительные итоги анализа

Итак, в рамках анализа отображения (1) было выяснено, что в фазовой плоскости системы существуют некоторые положения равновесия. По линейному приближению были определены и их типы – «седла» и «центры». Следующий, закономерный возникающий при этом вопрос заключается в том, как сшиваются между собой области, близкие к каждому из рассмотренных положений равновесия? В частности, как сшиваются между собой фрагменты фазовых портретов, полученные по-отдельности вблизи двух выбранных для примера положений равновесия (см. рис. 5)? Возможно, так, как показано на рис. 6?

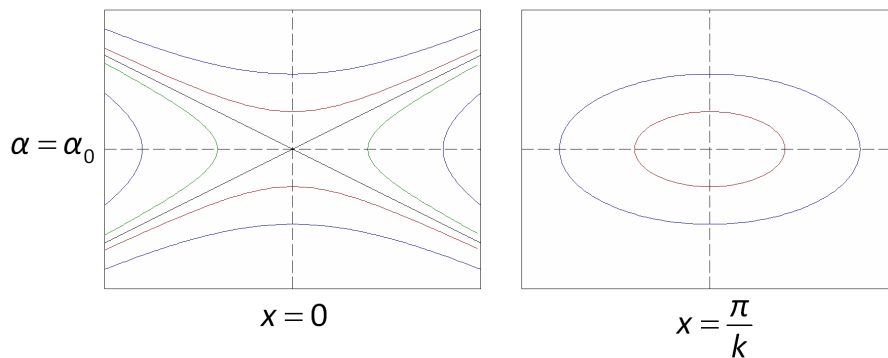


Рис. 5. Фрагменты фазового портрета, полученные в рамках линейного приближения вблизи точек $x_0 = 0$, $\alpha_0 = \arctg(\pi/kd)$ и $x_0 = \pi/k$, $\alpha_0 = \arctg(\pi/kd)$.

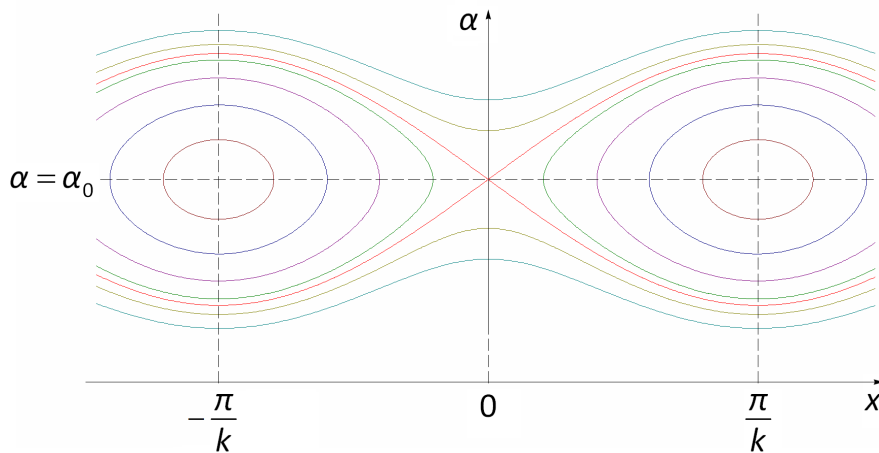


Рис. 6. Вариант сшивки двух фрагментов фазового портрета системы, показанных на рис. 5.

Чтобы подтвердить или опровергнуть предположение о структуре полного фазового портрета, подобной структуре фазового портрета математического маятника, необходимо попытаться найти уравнение сепаратрисы, показанной на рисунке красным цветом. Этому и посвящен следующий раздел работы.

3. Структура фазовой плоскости

Итак, сделаем попытку описания структуры фазового портрета системы в целом, сшивая между собой отдельные, известные нам его фрагменты. Для этого линеаризуем отображения по малым отклонениям угла от α_0 , введя для этого, как и ранее $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n - \alpha_0$. Что касается координаты x_n , сделаем замену $\tilde{x}_n = x_n - 2d \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot n$, где $2d \operatorname{tg} \alpha_0 \equiv 2\pi/k$ – один период гофрировки. В результате, после несложных преобразований система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_{n+1} = \tilde{\alpha}_n + 2kas \operatorname{sink} \tilde{x}_n \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{2d}{\cos^2 \alpha_0} \tilde{\alpha}_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n}{(n+1) - n} = 2kas \operatorname{sink} \tilde{x}_n \\ \frac{\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n}{(n+1) - n} = \frac{2d}{\cos^2 \alpha_0} \tilde{\alpha}_n \end{cases} \quad (21)$$

Понимая под величинами n дискретные значения некоторой непрерывной переменной «времени», заметим, что в такой форме уравнения становятся похожи на дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\alpha}} = 2kas \operatorname{sink} \tilde{x}, \\ \dot{\tilde{x}} = \frac{2d}{\cos^2 \alpha_0} \tilde{\alpha}, \end{cases} \quad (22)$$

являющиеся каноническими для гамильтониана математического маятника (!):

$$H = \frac{d}{\cos^2 \alpha_0} \tilde{\alpha}^2 + 2a \operatorname{cosk} \tilde{x}. \quad (23)$$

Можно поступить несколько иначе и строго показать, что выражение $H_n = d\tilde{\alpha}_n^2 / \cos^2 \alpha_0 + 2a \operatorname{cosk} \tilde{x}_n$ с точностью до членов первого порядка по a/d является интегралом движения, т.е. $H_{n+1} = H_n$. Пользуясь его структурой, нетрудно найти уравнение сепаратрисы, подтверждая тем самым выдвинутое ранее предположение о структуре фазового портрета:

$$2a = \frac{d}{\cos^2 \alpha_0} \tilde{\alpha}^2 + 2a \operatorname{cosk} \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = \pm 2 \sqrt{\frac{a}{d}} \operatorname{cos} \alpha_0 \cdot \sin \frac{k\tilde{x}}{2} \quad (24)$$

Отсюда получаем для ширины области, охваченной сепаратрисой, следующее выражение:

$$\Delta \tilde{\alpha} = 4 \sqrt{\frac{a}{d}} \operatorname{cos} \alpha_0. \quad (25)$$

Структура фазового портрета, обнаруженная здесь, характерна для нелинейного резонанса. Если понимать ее так, то что же тогда за резонанс проявляет себя в рассматриваемой системе? Судя по всему, в данном случае мы имеем дело с проявлением резонанса связи между двумя степенями свободы – движением вдоль канала и поперек. Понять природу подобного резонанса легче всего посредством следующего мысленного эксперимента – «вырежем» из канала один его период и, скрутив в тру-

бочку, склеим по линиям разреза. При этом в случае нулевой амплитуды гофрировки получится поверхность цилиндра высотой d и радиусом k^{-1} . Движение на такой поверхности может быть охарактеризовано двумя частотами – частотой продольных колебаний вдоль оси цилиндра ω_1 и частотой обращения вокруг нее ω_2 . В случае рассмотренного резонанса с $m = 1$ за время одного колебания поперек канала материальная точка пролетает один период гофрировки, таким образом, можно сказать, что $\omega_1 = \omega_2$. Очевидно, в общем случае периодические траектории, отвечающие произвольным значениям m , отвечают резонансам вида $\omega_2 = m\omega_1$.

Замечание. Ширина резонансов, связанных с другими, ранее рассмотренными периодическими траекториями, также рассчитывается по формуле (25): меняется лишь величина α_0 .

Для полноты проведенного анализа теперь необходимо описать также и траектории, не попавшие в резонанс. За основу возьмем вновь систему (1) и используем то, что траектории являются слабозмущенными, т.е. угол α меняется мало на фоне некоторого среднего значения $\bar{\alpha}$, поэтому

$$x_{n+1} \approx x_n + 2d \operatorname{tg} \bar{\alpha} \Rightarrow x_n \approx x_0 + 2d \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot n. \quad (26)$$

При этом вторая формула системы (1) дает

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\approx \alpha_n - 2ka \sin(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (2n + 1)) = \\ &= \alpha_{n-1} - 2ka(\sin(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (2n + 1)) + \sin(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (2n - 1))) = \dots \\ &\dots = \alpha_0 - 2ka \sum_{j=0}^n \sin(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (2j + 1)) = ? \end{aligned} \quad (27)$$

Для расчета суммы синусов обратимся к другой, более удобной сумме экспонент с мнимыми показателями:

$$\sum_{j=0}^n e^{i(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (2j+1))} = e^{i(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha})} \sum_{j=0}^n e^{i2kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot j} = \dots \quad (28)$$

Оставшаяся сумма может быть найдена по формуле суммы $n + 1$ членов геометрической прогрессии:

$$\dots = e^{i(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha})} \frac{1 - e^{i2kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (n+1)}}{1 - e^{i2kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha}}} = e^{ikx_0} e^{ikdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (n+1)} \frac{\sin(kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (n+1))}{\sin(kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha})}. \quad (29)$$

Нетрудно заметить, что сумма синусов в (27) является мнимой частью суммы (28) и, следовательно, конечного выражения в (29). Таким образом,

$$\alpha_{n+1} \approx \alpha_0 - 2ka \sin(kx_0 + kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (n+1)) \frac{\sin(kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (n+1))}{\sin(kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha})}, \quad (30)$$

что после несложных преобразований примет вид:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_0 - ka \frac{\cos kx_0}{\sin(kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha})} + ka \frac{\cos(kx_0 + 2kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha} \cdot (n+1))}{\sin(kdt \operatorname{tg} \bar{\alpha})} \quad (31)$$

Первые два слагаемых в правой части не зависят от n и, очевидно, дают величину введенного ранее среднего значения угла α , т.е.

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 - ka \frac{\cos kx_0}{\sin(kd \operatorname{tg} \bar{\alpha})}, \quad (32)$$

что по сути является уравнением для нахождения $\bar{\alpha}$. В итоге, угол α меняется относительно среднего своего значения на величину порядка ka .

Таким образом, все элементы фазового портрета описаны в рамках допустимых приближений и осталось лишь проиллюстрировать проведенный анализ результатами численного моделирования.

4. Сопоставление с результатами численного моделирования

На рис. 7 представлены результаты расчетов согласно системе (1) для ширины канала $d = \pi$, частоты гофрировки $k = 1$ и различных значений амплитуды гофрировки a . Для удобства по вертикальной оси здесь отложены не значения угла α , а значения его тангенса: это растягивает картину по вертикали в области $\pi/4 < \alpha < \pi/2$, позволяя наблюдать гораздо больше резонансов. Например, на рис. 7(a) хорошо видны резонансы, отвечающие значениям угла α_0 согласно (2) с $m = 0, \dots, 4$. С увеличением амплитуды гофрировки ширина резонансов увеличивается, сепаратрисы разрушаются, начинается постепенное перекрытие резонансов между собой, начинающееся с резонансов с большими m и перемещающееся в область с меньшими значениями m .

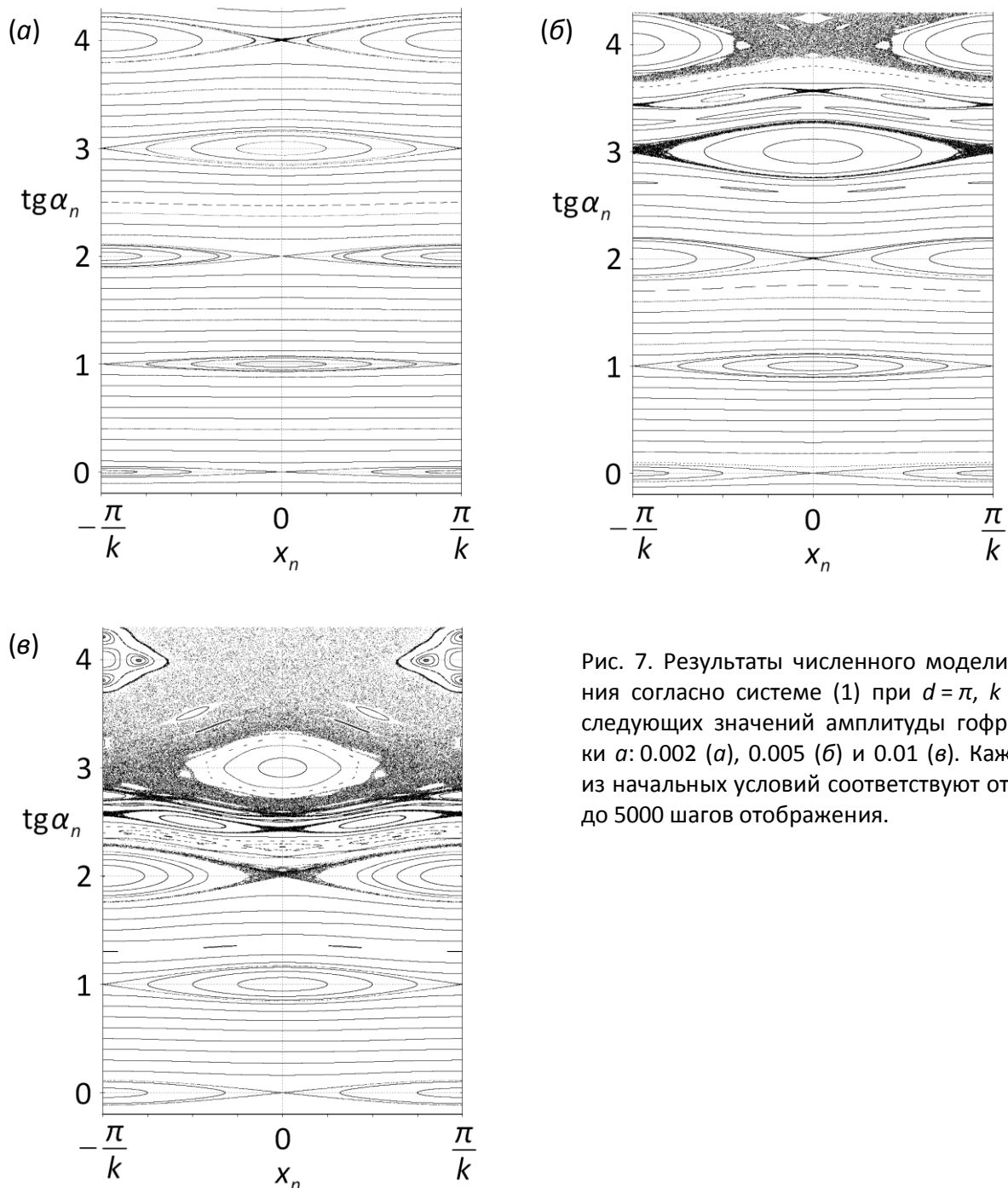


Рис. 7. Результаты численного моделирования согласно системе (1) при $d = \pi$, $k = 1$ и следующих значений амплитуды гофрировки a : 0.002 (a), 0.005 (б) и 0.01 (в). Каждому из начальных условий соответствуют от 2000 до 5000 шагов отображения.

II. Материальная точка, скачущая в однородном поле тяжести по гофрированной поверхности

Рассмотрим далее другой, более сложный пример механической системы, допускающей описание и анализ динамики посредством отображений. Речь идет о движении материальной точки в однородном поле тяжести при условии, что область ее движения ограничена снизу периодически гофрированной поверхностью [6].

1. Вывод отображений

Итак, как и в предыдущем примере, для построения отображений необходимо связать между собой координаты точек двух последовательных соударений (x_n и x_{n+1}), а также углы, под которыми они происходят (φ_n и φ_{n+1}). Уравнение гофрированной поверхности для простоты выберем в виде $y(x) = -a \cos kx$ (см. рис. 8), а соударения с ней будем считать абсолютно упругими.

Что касается углов, под которыми происходят соударения, то из геометрических соображений нетрудно установить (см. рис. 8), что

$$\alpha_{n+1} = \varphi_n - 2 \operatorname{arctg}(ka \sin kx_n). \quad (33)$$

Далее положим, что за мгновение до соударения материальная точка имела скорость u_n^* , т.е. $u_{n,x} = u_n^* \sin \varphi_n$ и $u_{n,y} = -u_n^* \cos \varphi_n$. После абсолютно упругого соударения модуль скорости останется тем же, поэтому ее проекции будут, соответственно,

$$\begin{cases} u_{n+1,x} = u_n^* \sin \alpha_{n+1} \\ u_{n+1,y} = u_n^* \cos \alpha_{n+1} \end{cases} \quad (34)$$

Траектория движения материальной точки после n -го соударения является параболой вида

$$y_{tr}(x) = y(x_n) + \operatorname{ctg} \alpha_{n+1} \cdot (x - x_n) - \frac{g(x - x_n)^2}{2u_{n+1,x}^2}, \quad (35)$$

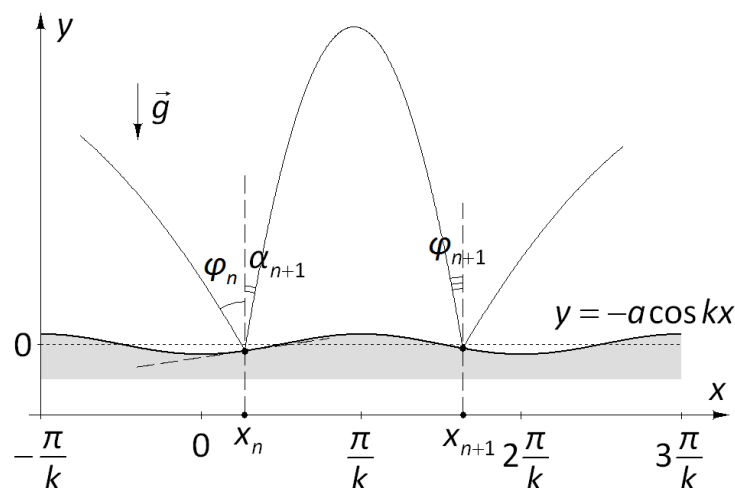


Рис. 8. Два последовательных соударения материальной точки о гофрированную границу.

поэтому для нахождения координаты следующего соударения, т.е. x_{n+1} , необходимо решить уравнение

$$-a \cos k x_{n+1} = -a \cos k x_n + \operatorname{ctg} \alpha_{n+1} \cdot (x_{n+1} - x_n) - \frac{g(x_{n+1} - x_n)^2}{2u_{n+1,x}^2}. \quad (36)$$

Решая его как квадратное, приведем это уравнение к виду, удобному для применения к его дальнейшему численному решению метода простых итераций:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{u_{n+1,x}}{g} \left(u_{n+1,y} + \sqrt{u_{n+1,y}^2 - 2ga(\cos k x_n - \cos k x_{n+1})} \right). \quad (37)$$

Заметим, что математически уравнение (37) может иметь и более одного решения, что связано с тем, что парабола (35) пересекает синусоиду нижней границы в нескольких точках. При этом физическим смыслом обладает, конечно, лишь один из корней – либо наибольший, либо наименьший (в зависимости от направления движения вдоль оси Ox). Важно понимать, что такая ситуация встречается для пологих траекторий и относительно больших амплитуд гофрировки. При этом поведение системы является, как правило, сильно хаотическим, отчего в рамках настоящего анализа эта область параметров не будет нами затронута.

Для завершения построения отображений, связывающих состояния системы в моменты последовательных соударений, необходимо рассчитать угол φ_{n+1} и модуль скорости материальной точки u_{n+1}^* в момент $(n+1)$ -го соударения. Приравнивая полную механическую энергию через мгновение после n -го и за мгновение до $(n+1)$ -го соударения

$$\frac{u_{n+1}^2}{2} - g a \cos k x_n = \frac{u_{n+1}^{*2}}{2} - g a \cos k x_{n+1}, \quad (38)$$

для модуля скорости получаем

$$u_{n+1}^* = \sqrt{u_{n+1}^2 + 2ga(\cos k x_{n+1} - \cos k x_n)}. \quad (39)$$

С учетом неизменности горизонтальной составляющей скорости, $u_{n+1,x} = u_{n+1,x}^*$, последнее соотношение позволяет рассчитать и искомый угол падения на гофрированную поверхность:

$$\varphi_{n+1} = \operatorname{arctg} \frac{u_{n+1,x}}{\sqrt{u_{n+1,y}^2 + 2ga(\cos k x_{n+1} - \cos k x_n)}}. \quad (40)$$

Таким образом, если для начального соударения заданы значения x_0 и φ_0 , последовательное применение формул (33), (34), (37), (39) и (40) позволяет рассчитать соответствующие параметры для всех дальнейших соударений. Искомые отображения найдены.

Полная энергия E материальной точки, как уже указывалось, является интегралом движения, причем в соответствие ее значению удобно поставить параметр длины – эквивалентную высоту h , отсчитываемую от нулевого уровня, с которой материальная точка должна быть сброшена без начальной скорости, чтобы при соударении

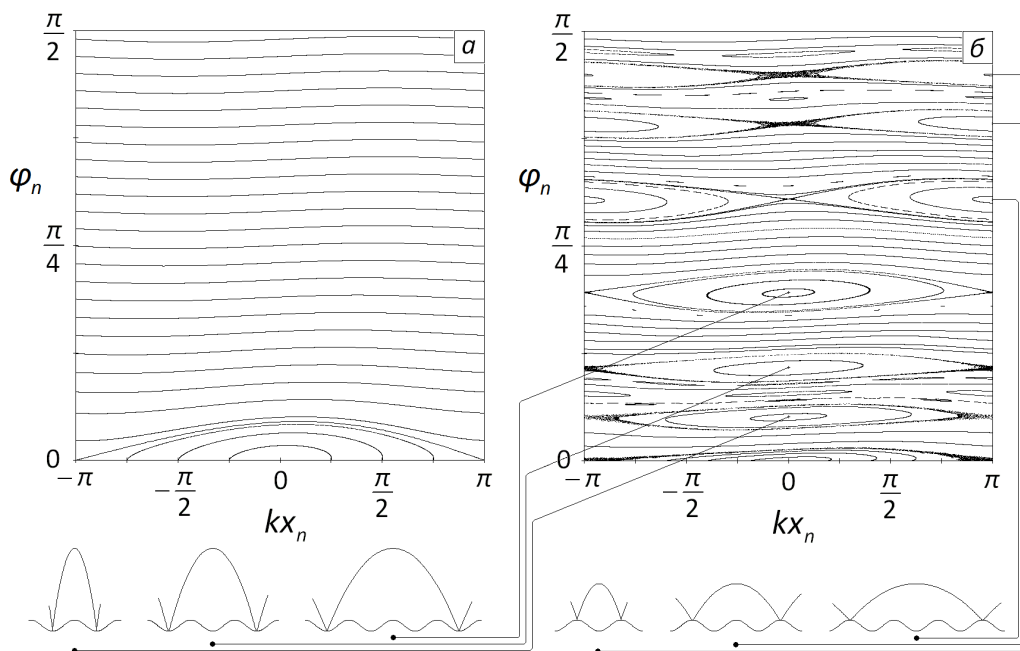


Рис. 9. Фрагменты фазового портрета системы (верхние полуплоскости) при $k = 1$, $a = 0.01$, а также $h = 1$ (а) и $h = 10$ (б). Каждому начальному условию отвечают от трех до пяти тысяч шагов отображения. Схематично показаны также примеры периодических траекторий, отвечающих центрам резонансов на рисунке (б)

с гофрированной поверхностью иметь ту же энергию, т.е. $E = m_0gh$. Причем, если начальное значение угла φ_0 равно нулю, то h – это и есть та самая высота, с которой материальная точка была сброшена. Заметим, что в последней формуле m_0 – масса материальной точки, от величины которой, как и в любой другой кинематической задаче, параметры траектории не зависят (см. формулы отображения).

На рис. 9 представлены результаты численного моделирования динамики системы, проведенные на основе представленных выше соотношений. Каждому из нескольких десятков начальных условий соответствуют от трех до пяти тысяч шагов отображения, все величины приведены в системе СИ, и величина ускорения свободного падения g , соответственно, взята равной 9.8. Важно то, что на рис. 9 представлены лишь половины фазовых портретов – верхние полуплоскости с $\varphi > 0$, что отвечает движению материальной точки в положительном направлении оси Ox . Структура нижней полуплоскости аналогична и отличается лишь инверсией относительно начала координат.

На фазовой плоскости, представленной на рис. 9(а), можно выделить резонанс, центр которого располагается в начале координат. Траектории, отвечающие начальным условиям вблизи этого центра, отвечают отскокам материальной точки вблизи одного из минимумов гофрированного профиля. При увеличении энергии (в данном случае параметра h) структура фазовой плоскости становится заметно сложнее (см. рис. 9(б)): ясно видны шесть появившихся здесь резонансов первого порядка, а также несколько резонансов более высоких порядков. На выносках здесь также схематично показаны и примеры траекторий, отвечающих центрам этих шести новых резонансов.

2. Резонансы в отображении, их рождение и взаимодействие

Итак, визуальный анализ структуры фазовой плоскости на рис. 9(б) указывает на наличие в системе ряда резонансов, связанных с кратностью числа отскоков от нижней границы числу пройденных при этом периодов гофрировки, т.е. фактически со взаимодействием двух степеней свободы. В силу такой природы этих резонансов их вполне уместно называть резонансами связи. Сам факт их появления вполне естественен: аналогичные резонансы мы уже наблюдали в системе, анализ которой приведен в первом разделе настоящего пособия. Интересным здесь является тот факт, что центры трех из шести резонансов, расположенных выше границы $\varphi = \pi/4$, лежат в точке $x = \pi/k$. Это значит, что соответствующие таким начальным условия траектории отвечают устойчивым (!) скачкам материальной точки «по горбам» гофрированного профиля, что интуитивно кажется невозможным.

Итак, рассмотрим подробно периодические (резонансные) траектории, начинающиеся при $x_0 = 0$ и $x_0 = \pi/k$, а заканчивающиеся в точках $x = 2\pi m/k$ и $x = \pi/k + 2\pi m/k$ соответственно, и отвечающие, таким образом, скачкам материальной точки на m периодов гофрировки. Ограничимся далее рассмотрением лишь положительных значений m , что отвечает движению в положительном направлении оси Ox . Формулы отображения дают очевидное равенство $\alpha_n = \varphi_n \equiv \varphi_0$, а также

$$x_n = x_0 + \frac{2u_{n,x}u_{n,y}}{g} = x_0 + \frac{(u_0^*)^2 \sin 2\varphi_0}{g}. \quad (41)$$

Значение же скорости u_0^* определяется из закона сохранения энергии

$$gh = \frac{(u_0^*)^2}{2} - g a \cos kx_0, \quad (42)$$

откуда $u_0^* = \sqrt{2g(h + a \cos kx_0)}$ или же для краткости $u_0^* = \sqrt{2gh'}$, где $h' = h + a \cos kx_0$.

Как уже отмечалось, для рассматриваемых траекторий $x = x_0 + 2\pi m/k$, откуда с учетом (41) и выражения для u_0^* получаем условие, определяющее положение центра резонанса в фазовой плоскости:

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\pi m}{kh'}. \quad (43)$$

Поскольку $0 \leq \varphi_0 < \pi/2$, последнее уравнение имеет два решения:

$$\varphi_0^-(m) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi m}{kh'} \quad \text{и} \quad \varphi_0^+(m) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi m}{kh'}. \quad (44)$$

Обе эти величины располагаются симметрично относительно значения $\varphi = \pi/4$, причем $\varphi_0^-(m) < \pi/4$, а $\varphi_0^+(m) > \pi/4$. Условием существования решений является выполнение неравенства

$$h' > \frac{\pi m}{k}. \quad (45)$$

Таким образом, при $\pi/k < h' < 2\pi/k$ в фазовой плоскости существует пара стационарных точек $(x_0, \varphi_0^-(1))$ и $(x_0, \varphi_0^+(1))$, при $2\pi/k < h' < 3\pi/k$ появляется еще одна пара – $(x_0, \varphi_0^-(2))$ и $(x_0, \varphi_0^+(2))$, и так далее.

Следующий вопрос, на который следует ответить, касается устойчивости найденных стационарных точек. Для этого проведем вблизи них линеаризацию формул отображения: пусть $x_n = x_0 + \tilde{x}_n$, где $\tilde{x}_n \rightarrow 0$, и аналогично $\varphi_n = \varphi_0^\pm(m) + \tilde{\varphi}_n$ и $\alpha_n = \varphi_0^\pm(m) + \tilde{\alpha}_n$. В этом случае из формулы (33) имеем:

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \tilde{\varphi}_n \mp 2k^2 a \cdot \tilde{x}_n, \quad (46)$$

где верхний знак отвечает $x_0 = 0$, а нижний – $x_0 = \pi/k$. Оставляя в (37) лишь первый порядок по малым величинам, заметим, что разность косинусов в подкоренном выражении вклада не дает, поэтому будет

$$x_0 + \frac{2\pi m}{k} + \tilde{x}_{n+1} \approx x_0 + \tilde{x}_n + \frac{(u_n^*)^2 \sin 2(\varphi_0^\pm + \tilde{\alpha}_{n+1})}{g}, \quad (47)$$

откуда в итоге следует

$$\tilde{x}_{n+1} \approx \tilde{x}_n - \frac{2\pi m}{k} + \frac{(u_n^*)^2}{g} \left(\frac{\pi m}{kh'} + \cos 2\varphi_0^\pm \cdot 2\tilde{\alpha}_{n+1} \right). \quad (48)$$

Важно, что из (39) в первом порядке получается $u_{n+1}^* = u_{n+1}$, т.е. $u_{n+1}^* = u_n^* \equiv \sqrt{2gh'}$, а (40) аналогично дает $\tilde{\varphi}_{n+1} = \tilde{\alpha}_{n+1}$. С учетом последнего в линейном приближении отображения сводятся к простой системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{n+1} = \tilde{\varphi}_n \mp 2k^2 a \cdot \tilde{x}_n \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + 4h' \cos 2\varphi_0^\pm \cdot \tilde{\varphi}_{n+1} \end{cases} \quad (49)$$

или

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}_{n+1} = \hat{A} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix}_n, \quad (50)$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \mp 8k^2 ah' \cos 2\varphi_0^\pm & 4h' \cos 2\varphi_0^\pm \\ \mp 2k^2 a & 1 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Как и при анализе матрицы (7), обнаруживаем, что $\det \hat{A} = 1$, т.е. фазовый объем сохраняется, а устойчивость легко выяснить по величине модуля следа:

$$\text{Sp} \hat{A} = 2 \mp 8k^2 ah' \cos 2\varphi_0^\pm. \quad (52)$$

Поскольку второе слагаемое здесь следует считать малым по модулю по сравнению с первым, условие устойчивости положения равновесия $|\text{Sp} \hat{A}| < 2$ будет выполняться, если знаки перед вторым слагаемым и в верхнем индексе у угла φ_0 будут одинаковы.

Таким образом, на фазовой плоскости устойчивыми оказываются точки $(0, \varphi_0^-(m))$ и, возможно неожиданно, $(\pi/k, \varphi_0^+(m))$, а точки $(\pi/k, \varphi_0^-(m))$ и $(0, \varphi_0^+(m))$ – неустойчивы. Пользуясь собственными значениями и собственными векторами матрицы \hat{A} , можно показать, что типы данных положений равновесия – «центр» и «седло» соответственно. Структура фазового портрета, представленного на рис. 9(б), прекрасно согласуется с этим фактом.

Для аналитической оценки ширины рассматриваемых резонансов связи необходимо от линеаризованного отображения (50) перейти к дифференциальным уравнениям и восстановить приближенный «интеграл движения» – гамильтониан. Так, пренебрегая на главной диагонали матрицы \hat{A} слагаемым $\mp 8k^2ah' \cos 2\varphi_0^\pm$ по сравнению с единицей, отображения (50) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\tilde{x}_{n+1} - \tilde{x}_n}{(n+1) - n} = 4h' \cos 2\varphi_0^\pm \cdot \tilde{\varphi}_n \\ \frac{\tilde{\varphi}_{n+1} - \tilde{\varphi}_n}{(n+1) - n} = \mp 2k^2 a \cdot \tilde{x}_n \end{cases} \quad (53)$$

Превращая левые части этих уравнений в производные по *непрерывной переменной* n , последнюю систему можно понимать как канонические уравнения Гамильтона для системы с гамильтонианом:

$$H = 4h' \cos 2\varphi_0^\pm \cdot \frac{\varphi^2}{2} \pm 2a \frac{k^2 x^2}{2}. \quad (54)$$

Если далее для конкретики рассмотреть резонанс связи с центром в точке $(0, \varphi_0^-(m))$, то

$$H^- = 4h' \cos 2\varphi_0^- \cdot \frac{\varphi^2}{2} + 2a \frac{k^2 x^2}{2}. \quad (55)$$

Восстановив (55) до гамильтониана математического маятника

$$H_{res}^- = 4h' \cos 2\varphi_0^- \cdot \frac{\varphi^2}{2} - 2a \cos kx, \quad (56)$$

становится возможным получить приближенное уравнение сепаратрисы рассматриваемого резонанса

$$\boxed{\varphi^- = \sqrt{\frac{2a}{h' \cos 2\varphi_0^-}} \cos \frac{kx}{2}} \quad (57)$$

а также рассчитать его ширину:

$$\Delta\varphi^- = 2 \sqrt{\frac{2a}{h' \cos 2\varphi_0^-}} = \frac{2\sqrt{2a}}{\left((h+a)^2 - \pi^2 m^2 / k^2\right)^{1/4}}. \quad (58)$$

Аналогично, для резонанса с центром в точке $(\pi/k, \varphi_0^+(m))$ можно получить:

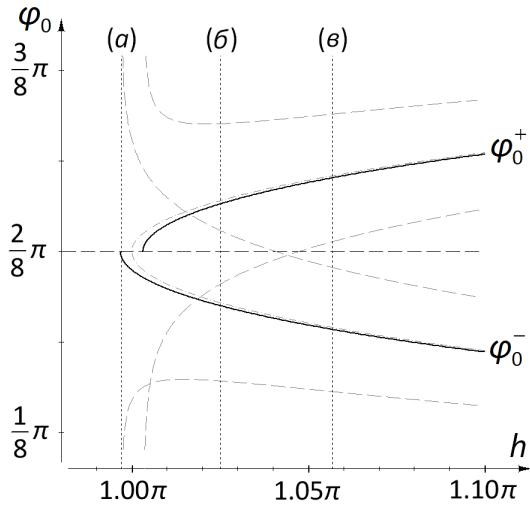


Рис. 10. Фрагмент зависимости $\varphi_0^\pm(1)$ от h , отвечающий моменту рождения первой пары резонансов связи ($m = 1$) для $k = 1$ и $a = 0.01$. Пунктирными линиями здесь показаны ширины резонансов, рассчитанные по формулам (58) и (59). Вертикальные пунктирные линии указывают на значения эквивалентной высоты h , взятые при построении фазовых портретов, представленных на рис. 11(а-в)

$$\Delta\varphi^+ = \frac{\sqrt{2a}}{\left((h-a)^2 - \pi^2 m^2/k^2\right)^{1/4}}. \quad (59)$$

Рассмотрим подробнее процесс «рождения» первой пары резонансов связи ($m = 1$) при изменении энергии материальной точки, т.е. параметра h (см. условие (45)). На рис. 10 показаны зависимости положения центров этих резонансов по оси φ в фазовой плоскости от h , построенные по формулам (44). Поскольку для них $h' = h \pm a$, верхняя и нижняя ветви кривой на рис. 10 сдвинуты по горизонтали друг относительно друга на $2a$. Также здесь длинным пунктиром показаны и ширины резонансов рассчитанные по формулам (58) и (59).

Как видно из этого рисунка, при изменении параметра h резонансы связи появляются на фазовой плоскости парами при значении $\varphi = \pi/4$. Интересно то, что рождаются они сразу *перекрытыми* друг с другом, а уже при дальнейшем увеличении энергии «раздвигаются» и уменьшают каждый свою ширину. Конечно, оценки ширин резонансов (58) и (59) сразу после их рождения несправедливы, поскольку при получении этих оценок отклонения угла φ от резонансных значений φ_0^\pm подразумевались малыми. Чтобы понять, насколько сделанные оценки адекватны реальному положению вещей, обратимся к рис. 11(а-в), где представлены фрагменты фазового портрета системы при значениях эквивалентной высоты h , отмеченных на рис. 10 вертикальным пунктиром и буквами (а-в).

Так на рис. 11(а) величина h выбрана таким образом, что $h'|_{x_0=0} = h + a > \pi/k$, а $h'|_{x_0=\pi/k} = h - a < \pi/k$, отчего устойчивое положение равновесия $(0, \varphi_0^-(1))$ уже существует, а $(\pi/k, \varphi_0^+(1))$ – еще нет. Как видно из этого рисунка, положение равновесия появляется на фазовой плоскости в результате укручения фазовых траекторий и их дальнейшего «перехлеста» с образованием сепаратрисной петли. Подобная ситуация известна, например, для модели двумерного ротатора с δ -образными толчками в контексте *перемежаемости* [7], а также в рамках задачи о топологии вязких течений [8]. На рис. 11(б) уже четко видны два устойчивых положения равновесия, однако сами резонансы еще не сформированы, и сепаратриса каждого из них по-прежнему

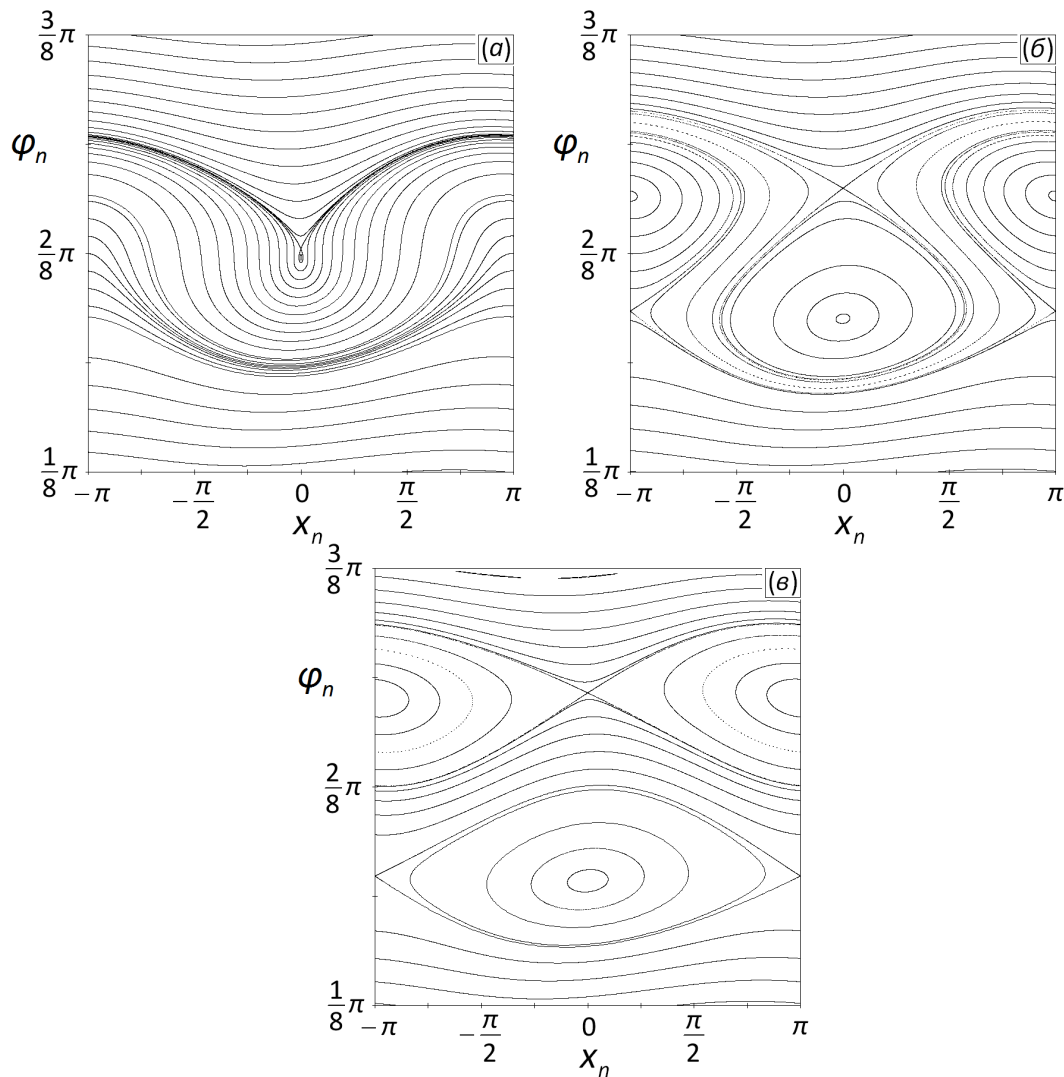


Рис. 11. Фрагменты фазового портрета системы для $k = 1$, $a = 0.01$ и $h = 3.132$ (а), $h = 3.22$ (б), $h = 3.32$ (в). Эти значения эквивалентной высоты отмечены также на рис. 10 вертикальными пунктирными линиями. Каждому начальному условию отвечают пять тысяч шагов отображения

имеет петлеобразную форму; на рис. 11(в) оба резонанса уже имеют «классическую» структуру.

Примечательным здесь является факт того, что сделанные оценки ширин резонансов при значениях эквивалентной высоты (б) и (в) согласуются с реальной структурой фазовой плоскости очень хорошо: на рис. 11(б) можно сравнивать общую ширину двух резонансов с предсказываемой, а на рис. 11(в) оказывается возможным сопоставлять с оценками уже ширину каждого из двух резонансов. В обоих случаях согласие более чем удовлетворительное.

Вторым примечательным фактом, касающимся структуры фазовых портретов на рис. 11, является видимое отсутствие на них областей, заполненных хаотическими орбитами. Последнее особенно удивительно, поскольку речь идет о двух резонансах, которые сближены друг с другом на расстояние, меньшее или равное по порядку величины сумме их полуширин. Тогда в согласии с известным критерием Чирикова [9] следовало бы ожидать перекрытия резонансов с образованием общего стохастиче-

ского слоя, при нахождении внутри которого поведение системы было бы в определенном смысле непредсказуемо.

Как показывают дополнительные расчеты, причиной отсутствия хаоса в данном случае является наличие в области между резонансами (в районе $\varphi = \pi/4$) инвариантной кривой, примечательной тем, что ее разрушение является причиной наступления глобального хаоса в рассматриваемой механической системе. В этом режиме перекрытыми оказываются не только пара рассматриваемых резонансов связи, но и все остальные резонансы в фазовой плоскости. А до наступления глобального хаоса, несмотря на сильную близость двух резонансов, стохастизация происходит лишь в структуре каждого из них и не приводит к перекрытию внутри пары. Таким образом, несмотря на то, что изучаемые резонансы связи рождаются парами в одной области фазовой плоскости, эволюционируют они отдельно друг от друга вплоть до установления в системе режима глобального хаоса.

III. Моделирование отображений на Интернет-ресурсах

В настоящее время в сети Интернет можно найти немало ресурсов, посвященных разного рода нелинейным явлениям, хаосу и, в частности, отображениям. Так, например,

- на странице http://nonlinmod.sgu.ru/illustration_programs.htm представлен ряд «нелинейных» программ, первая из которых моделирует одномерное логистическое отображение (отображение Фейгенбаума); ему же посвящена и страница http://www.ibiblio.org/e-notes/Chaos/ru/logistic_r.htm, содержащая соответствующее Java-приложение;
- на странице http://www.ibiblio.org/e-notes/Chaos/ru/stdmap_r.htm реализован Java-симулятор известного в нелинейной физике стандартного отображения (пример двумерного отображения);
- на странице <http://malyshev.professorjournal.ru/osc/practice/wg> сайта, разрабатываемого автором в рамках грантовой программы «Преподаватель онлайн», пользователю также предлагается Java-апплет, с помощью которого можно исследовать систему, подробно описанную в первой части настоящей работы, «поиграть» ее параметрами и т.п.

При этом, безусловно, следует иметь в виду, что эти и иные Интернет-приложения, как правило, не могут претендовать на высокую точность расчетов, однако позволяют на качественном уровне изучить свойства динамических систем, особенности режимов их поведения, проследить за проявлениями хаоса в них.

Задачи и вопросы для обсуждения

Итак, в рамках настоящего пособия были подробно рассмотрены два примера механических систем, допускающих анализ динамики посредством отображений. При этом в первом случае сначала был проведен подробный теоретический анализ отображения, описаны его резонансные особенности, после чего было проведено сопоставление этих данных с результатами численного моделирования. Во втором примере направление было несколько иным: сразу после вывода отображения был проведен численный расчет, который указал на наличие в системе резонансов, что в свою очередь потребовало теоретического обоснования, которое и было далее сделано.

Ниже предлагаются несколько учебных задач на отработку материала, а также вопросы для обсуждения.

1. Смоделировать на компьютере отображение (1) в двух предельных режимах – режиме широкого канала ($kd \gg 1$) и режиме узкого канала ($kd \ll 1$). Объяснить различия.
2. Проиллюстрировать с помощью Фурье-анализа наличие хаотических областей в фазовой плоскости системы (1).
3. Смоделировать на компьютере отображение для системы, рассмотренной в разделе II. На основе численных экспериментов попытаться выработать критерий перекрытия первой пары резонансов (с $m = 1$).
4. Записать отображение для материальной точки, движущейся между двумя стенками с координатами: $x_{\text{left}} = 0$, $x_{\text{right}} = L + a \sin \omega t$. Соударения абсолютно упругие, $L \gg a$. Скорость шарика считать много большей $a\omega$. Определить положения равновесия и их устойчивость.
5. Проанализировать отображение Чирикова-Тейлора (стандартное отображение)

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n - K \sin \vartheta_n \pmod{2\pi} \\ \vartheta_{n+1} = \vartheta_n + I_{n+1} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

на предмет положений равновесия и их устойчивости. Параметр K считать положительным. Найти критическое значение параметра K , при котором найденные положения равновесия становятся неустойчивыми. Проиллюстрировать результаты путем численного моделирования.

6. Смоделировать отображение пекаря:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} \left(2x_n, \frac{y_n}{2} \right), & 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}, \\ \left(2x_n - 1, \frac{y_n + 1}{2} \right), & \frac{1}{2} < x_n \leq 1. \end{cases}$$

Найти все циклы периодов 2, 3 и 4. Проиллюстрировать результаты с помощью компьютера.

Литература

- [1]. [Лихтенберг А., Либерман М., «Регулярная и стохастическая динамика», М.: Мир, 1984.](#)
- [2]. Арнольд В.И., ДАН СССР **156**, 9 (1964).
- [3]. Демиховский В.Я., Малышев А.И., Известия вузов. ПНД **12**, 3 (2004).
- [4]. [А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин, «Нелинейные колебания», М.: Физматлит, 2002.](#)
- [5]. Малышев А.И., Шандор А.С., «Структура и свойства твердых тел», Н. Новгород: изд-во ННГУ, 2003.
- [6]. [Малышев А.И., Нелинейная динамика **5\(3\)**, 425 \(2009\).](#)
- [7]. [Zaks M.A., Pikovsky A.S., and Kurths J., Physical Review Letters **77**, 4338 \(1996\).](#)
- [8]. [Abdulaev S.S., Chaos **4**, 569 \(1994\).](#)
- [9]. [Chirikov B.V., Physics Reports **52**, 263 \(1979\).](#)

Содержание

| | |
|--|-----------|
| Введение | 3 |
| I. Материальная точка в канале с гофрированной границей | 4 |
| 1. Стационарные точки отображения и их устойчивость | 4 |
| 2. Предварительные итоги анализа | 9 |
| 3. Структура фазовой плоскости | 10 |
| 4. Сопоставление с результатами численного моделирования | 13 |
| II. Материальная точка, скачущая в однородном поле тяжести по гофрированной поверхности | 14 |
| 1. Вывод отображений | 14 |
| 2. Резонансы в отображении, их рождение и взаимодействие | 17 |
| III. Моделирование отображений на Интернет-ресурсах | 23 |
| Задачи и вопросы для обсуждения | 24 |
| Литература | 25 |

Александр Игоревич **Малышев**

**Избранные главы теории нелинейных колебаний:
двумерные отображения**

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Подписано в печать 19.06.2012